

DS de mathématiques n°1

Logique, ensembles – Corrigé

Noté sur 115 pts ± 5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramenée sur 20 en multipliant par 21/100.

/18 Exercice 1 : Raisonnements

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On considère l'assertion suivante :

$$P : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x\sqrt{n} \notin \mathbb{Q} \quad \implies \quad x \text{ n'est pas un entier ou } n \geq 2$$

/1,5 a) Écrire la négation de P .

$$\text{non } P : \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x\sqrt{n} \notin \mathbb{Q} \text{ et } \text{non}(x \text{ n'est pas un entier ou } n \geq 2)$$

donc

$$\text{non } P : \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x\sqrt{n} \notin \mathbb{Q} \text{ et } x \text{ est un entier et } n < 2$$

b) En utilisant la contraposée, écrire une assertion Q qui est équivalente à P .
En déduire (avec justification) si P est vraie ou fausse.

(1,5 point pour trouver Q , 1,5 point pour la preuve)

Par la contraposée P équivaut à :

$$Q : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{non}(x \text{ n'est pas un entier ou } n \geq 2) \quad \implies \quad x\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$$

ou encore :

$$Q : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x \text{ est un entier et } n < 2) \quad \implies \quad x\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose $x \in \mathbb{Z}$ et $n < 2$. Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq 1$, donc $n \in \{0, 1\}$. En particulier, $\sqrt{n} = n$. Ainsi, $x\sqrt{n} = xn$ est un produit d'entiers. Donc $xn \in \mathbb{Z}$. En particulier, $xn \in \mathbb{Q}$.

2) Soit $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

/1,5

a) Donner une écriture de $\mathbb{Q}$ en tant qu'ensemble paramétré. Que peut-on en déduire sur q ?

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad (\text{on peut aussi prendre } b \text{ dans } \mathbb{N}^*)$$

En particulier, comme $q \in \mathbb{Q}$, alors on peut écrire $q = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

/4

b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $r + q \notin \mathbb{Q}$.

On suppose par l'absurde que $r + q \in \mathbb{Q}$. Alors

$$r + q = \frac{c}{d} \quad \text{avec } c \in \mathbb{Z}, \quad d \in \mathbb{Z}^*$$

De plus, on a vu en question précédente que $q = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
On a donc

$$\begin{aligned} r &= \frac{c}{d} - q = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \\ &= \frac{bc - ad}{bd} \end{aligned}$$

Or, $bc - ad \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi, $r \in \mathbb{Q}$. Contradiction car $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$$

/8

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq n^2$

(2,5 points pour l'idée et la rédaction de la récurrence double, 1 point pour l'initialisation et 4,5 points pour l'hérédité)

On raisonne par récurrence double.

- Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$.
Pour $n = 2$, on a $u_2 = 1$, donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$.
La propriété est donc vérifiée pour les rangs 1 et 2.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $1 \leq u_n \leq n^2$ et $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$.
Montrons que $1 \leq u_{n+2} \leq (n+2)^2$. Comme $u_n \geq 0$, on a

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \geq u_{n+1} \geq 1$$

Ainsi, on a déjà $1 \leq u_{n+2}$. Montrons que $u_{n+2} \leq (n+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \\ &\leq (n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2 &\leq (n+2)^2 \\ \iff \frac{2}{n+2}n^2 &\leq (n+2)^2 - (n+1)^2 \\ \iff \frac{2}{n+2}n^2 &\leq (n+2 - (n+1)) \times (n+2 + n+1) \\ \iff \frac{2}{n+2}n^2 &\leq 2n+3 \\ \iff 2n^2 &\leq (n+2)(2n+3) \\ \iff 2n^2 &\leq 2n^2 + 4n + 3n + 6 \\ \iff 0 &\leq 7n + 6 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie, donc on a bien $u_{n+2} \leq (n+2)^2$. L'assertion est donc vérifiée au rang $n+2$.

Finalement, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq n^2$.

/43 Exercice—Problème 2 : Une équation fonctionnelle dans $\mathbb{N}$

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

L'objectif de cet exercice est de prouver que les **seules** solutions de cette équation fonctionnelle sont :

- L'application nulle, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 0$
- L'application identité, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$

On notera que ces deux fonctions sont bien des solutions, et ce de façon évidente. Dans la suite de l'exercice, on considère f une fonction solution quelconque et on note a l'entier naturel $f(1)$.

/2 1) Montrer que $f(0) = 0$.

On pose $m = n = 0$. L'équation donne alors

$$f(0^2 + 0^2) = f(0)^2 + f(0)^2$$

ou encore $f(0) = 2f(0)^2$. On pose $x = f(0)$, de sorte que $2x^2 - x = 0$. Cela se réécrit $x(2x - 1) = 0$. On en déduit que $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Or, $x = f(0) \in \mathbb{N}$ par hypothèse, donc nécessairement $x = f(0) = \boxed{0}$.

/1 2) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $f(n^2) = f(n)^2$.

On pose $m = 0$. En prenant l'équation pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on a

$$f(0^2 + n^2) = f(0)^2 + f(n)^2$$

ou encore, puisque $f(0) = 0$,

$$\boxed{f(n^2) = f(n)^2}$$

/1,5 3) En déduire que a est égal à 0 ou à 1.

En utilisant la question précédente avec $n = 1$, on obtient $f(1) = f(1)^2$, i.e. $a = a^2$. De cela, on obtient que $a^2 - a = 0$, i.e. $a(a - 1) = 0$. Ainsi $a = 0$ ou $a = 1$.

4) Dans cette question, on souhaite montrer que pour tout entier naturel n , on a $f(n) = an$. On notera que l'égalité est déjà vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$.

/4,5 a) Vérifier successivement les égalités $f(2) = 2a$, $f(4) = 4a$, et $f(5) = 5a$.

$$\begin{array}{lll} f(2) = f(1^2 + 1^2) & f(4) = f(0^2 + 2^2) & f(5) = f(1^2 + 2^2) \\ = f(1)^2 + f(1)^2 & = f(0)^2 + f(2)^2 & = f(1)^2 + f(2)^2 \\ = a^2 + a^2 & = 0 + (2a)^2 & = a^2 + (2a)^2 \\ = a + a & = 4a^2 & = 5a^2 \\ = \boxed{2a} & = \boxed{4a} & = \boxed{5a} \end{array}$$

/4 b) Utiliser les valeurs de $f(4)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(3) = 3a$.

Comme $3^2 + 4^2 = 5^2$ on a

$$\begin{aligned} f(3^2 + 4^2) &= f(5^2) \\ \Rightarrow f(3)^2 + f(4)^2 &= f(5)^2 \\ \Rightarrow f(3)^2 &= (5a)^2 - (4a)^2 \\ \Rightarrow f(3)^2 &= 9a^2 \\ \Rightarrow |f(3)| &= 3|a| \\ \Rightarrow \boxed{f(3) = 3a} \end{aligned}$$

car $f(3)$ et a sont tous deux positifs.

c) Utiliser les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(7) = 7a$.

Comme $5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2$ on a

$$\begin{aligned} f(5^2 + 5^2) &= f(1^2 + 7^2) \\ \Rightarrow f(5)^2 + f(5)^2 &= f(1)^2 + f(7)^2 \\ \Rightarrow f(7)^2 &= (5a)^2 + (5a)^2 - a^2 \\ \Rightarrow f(7)^2 &= 49a^2 \\ \Rightarrow \boxed{f(7) = 7a} \end{aligned}$$

car $f(7)$ et a sont tous deux positifs.

d) Par un calcul rapide et sans justifier de manière précise, montrer que $f(8) = 8a$, $f(9) = 9a$, $f(10) = 10a$ et $f(6) = 6a$.

(1,5 points fois 3 pour $f(8)$, $f(9)$ et $f(10)$, puis 4,5 points pour $f(6)$).

$$\begin{aligned} f(8) &= f(2^2 + 2^2) = f(2)^2 + f(2)^2 \\ &= (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2 = \boxed{8a} \end{aligned}$$

$$f(9) = f(3^2) = f(3)^2 = (3a)^2 = 9a^2 = \boxed{9a}$$

$$\begin{aligned} f(10) &= f(3^2 + 1^2) = f(3)^2 + f(1)^2 \\ &= (3a)^2 + a^2 = 10a^2 = \boxed{10a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(6^2 + 8^2) &= f(10^2) \\ \Rightarrow f(6)^2 + f(8)^2 &= (10a)^2 \\ \Rightarrow f(6)^2 &= (10a)^2 - (8a)^2 \\ \Rightarrow f(6)^2 &= 36a^2 \\ \Rightarrow f(6) &= \boxed{6a} \end{aligned}$$

On admet que pour tout entier k on a :

$$\begin{cases} (2k)^2 + (k-5)^2 = (2k-4)^2 + (k+3)^2 \\ (2k+1)^2 + (k-2)^2 = (2k-1)^2 + (k+2)^2 \end{cases}$$

e) Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = an$. On notera que l'initialisation a déjà été faite pour n allant de 0 à 10. L'hérédité consistera donc à montrer que $f(n) = an$ à partir de $n = 11$.

On raisonne par récurrence forte.

- Pour n allant de 0 à 10, on a déjà montré que $f(n) = an$ dans les questions précédentes.
- Soit $n \geq 11$. On suppose que pour tout $N \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $f(N) = aN$. Montrons que $f(n) = an$.
 - ★ Si n est pair, alors on peut l'écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Comme $n \geq 12$, on a automatiquement $k \geq 6$. En particulier, $k-5$ et $2k-4$ sont des entiers naturels, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f((2k)^2 + (k-5)^2) &= f((2k-4)^2 + (k+3)^2) \\ \Rightarrow f(2k)^2 + f(k-5)^2 &= f(2k-4)^2 + f(k+3)^2 \end{aligned}$$

De plus, on a $k-5 \leq 2k-1 = n-1$ donc par hypothèse de récurrence, on a $f(k-5) = (k-5)a$. De même $f(2k-4) = (2k-4)a$. Enfin, comme $k \geq 6$, on a $2k \geq 6+k$ et donc $k+3 \leq 2k-3 \leq n-1$, donc là encore par hypothèse de récurrence, $f(k+3) = (k+3)a$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(2k)^2 + f(k-5)^2 &= f(2k-4)^2 + f(k+3)^2 \\ \Rightarrow f(2k)^2 + (k-5)^2 a^2 &= (2k-4)^2 a^2 + (k+3)^2 a^2 \\ \Rightarrow f(2k)^2 &= [(2k-4)^2 + (k+3)^2 - (k-5)^2] a^2 \\ \Rightarrow f(2k)^2 &= (2k)^2 a^2 \\ \Rightarrow f(2k) &= (2k)a \end{aligned}$$

car $f(2k)$, $2k$ et a sont positifs. Ainsi, on a $f(n) = an$ dans ce cas.
 ★ Si n est impair, alors on peut l'écrire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.
 Comme $n \geq 11$, on a automatiquement $k \geq 5$. En particulier, $k - 2$ et $2k - 1$ sont des entiers naturels, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f[(2k+1)^2 + (k-2)^2] &= f[(2k-1)^2 + (k+2)^2] \\ \implies f(2k+1)^2 + f(k-2)^2 &= f(2k-1)^2 + f(k+2)^2 \end{aligned}$$

Or, $k - 2 \leq 2k = n - 1$ donc $f(k - 2) = (k - 2)a$ par hypothèse de récurrence. De même, on a $f(2k - 1) = (2k - 1)a$. Enfin, comme $k \geq 5$, on a $2k \geq 5 + k$, de sorte que $k + 2 \leq 2k - 3 \leq n - 1$, donc là encore par hypothèse de récurrence, on a $f(k + 2) = (k + 2)a$.
 On a donc :

$$\begin{aligned} f(2k+1)^2 + f(k-2)^2 &= f(2k-1)^2 + f(k+2)^2 \\ \implies f(2k+1)^2 + (k-2)^2 a^2 &= (2k-1)^2 a^2 + (k+2)^2 a^2 \\ \implies f(2k+1)^2 &= [(2k-1)^2 + (k+2)^2 - (k-2)^2] a^2 \\ \implies f(2k+1)^2 &= (2k+1)^2 a^2 \\ \implies f(2k+1) &= (2k+1)a \end{aligned}$$

car $f(2k+1)$, $2k+1$ et a sont positifs. Ainsi, on a $f(n) = an$ dans ce cas.

Finalement, on a bien montré que $f(n) = an$ dans tous les cas.

On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = an$.

/2 5) Conclure en précisant le raisonnement utilisé.

(0,75 point pour "analyse-synthèse", 0,75 point pour donner l'ensemble des solutions, 0,5 point pour préciser ce qui tient lieu d'analyse et ce qui tient lieu de synthèse).

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : étant donné f une fonction solution, par la question précédente on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = an$, et par la question 3), on sait que $a = 0$ ou $a = 1$. Si $a = 0$, on obtient que f est la fonction nulle. Si $a = 1$, on obtient que f est la fonction identité.
- Synthèse : réciproquement, comme vu dans l'énoncé, ces deux fonctions vérifient trivialement l'équation.

Ainsi (avec $\mathbb{N}$ l'ensemble de départ des fonctions ci-dessous) :

$$\mathcal{S} = \{n \mapsto 0, \quad n \mapsto n\}$$

/54 Exercice—Problème 3 : La différence symétrique

Soit A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E , on appelle **différence symétrique** de A et B l'ensemble noté $A \Delta B$ que l'on définit par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

On note par ailleurs $A \Delta' B$ l'ensemble :

$$A \Delta' B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Enfin, pour tout sous-ensemble X de E , on notera $\overline{X}$ son complémentaire dans E .

/2 1) Soit C et D deux sous-ensembles de E . Montrer que $C \setminus D = C \cap \overline{D}$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in C \setminus D &\iff x \in C \text{ et } x \notin D \\ &\iff x \in C \text{ et } x \in \overline{D} \\ &\iff x \in C \cap \overline{D} \end{aligned}$$

D'où $C \setminus D = C \cap \overline{D}$.

/1 2) En déduire une nouvelle expression de $A \Delta B$ et de $A \Delta' B$ avec uniquement des opérations d'unions, d'intersections, et de passages au complémentaire.

(+1 point si vous avez utilisé la loi de Morgan)

On a

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A \Delta' B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \end{aligned}$$

/6 3) Montrer que $A\Delta B = A\Delta' B$.

(dont 1 point pour la loi de Morgan, si et seulement si vous ne l'avez pas utilisée avant)

Par la question précédente :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}] \\ &= [(A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})] \cup [(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})] \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A\Delta' B \end{aligned}$$

(On pouvait également faire un raisonnement par double inclusion, mais c'est assez long)

Ainsi, $A\Delta' B$ n'est qu'une expression alternative de la différence symétrique de A et de B . Dans la suite, on se contentera d'appeler $A\Delta B$ cet ensemble.

4) Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique, c'est-à-dire montrer que :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

/8

On a :

$$\begin{aligned} A \cap (B\Delta C) &= A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)] \\ &= [A \cap (B \cap \overline{C})] \cup [A \cap (\overline{B} \cap C)] \\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \cap B)\Delta(A \cap C) &= [(A \cap B) \cap \overline{A \cap C}] \cup [\overline{A \cap B} \cap (A \cap C)] \\ &= [(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})] \cup [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap C)] \\ &= [(A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})] \\ &\quad \cup [(\overline{A} \cap A \cap C) \cup (\overline{B} \cap A \cap C)] \\ &= [\emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C})] \cup [\emptyset \cup (\overline{B} \cap A \cap C)] \\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

5) Montrer que :

$$A\Delta B = A\Delta C \implies B = C$$

/10

On suppose $A\Delta B = A\Delta C$. Montrons que $B = C$.

• Soit $x \in B$. Montrons que $x \in C$.

★ Si $x \notin A$, alors $x \in B \setminus A$ donc $x \in A\Delta B$. Ainsi, $x \in A\Delta C$. En particulier, $x \in A \setminus C$ ou $x \in C \setminus A$. Cependant, $x \notin A$, donc $x \notin A \setminus C$. On en déduit que $x \in C \setminus A$. En particulier, $x \in C$.

★ Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. En particulier, $x \notin (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, donc $x \notin A\Delta B$. D'où $x \notin A\Delta C$. Dans ce cas, $x \in \overline{A\Delta C}$, ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} x &\in \overline{(A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A})} \\ &\iff x \in \overline{(A \cap \overline{C})} \cap \overline{(C \cap \overline{A})} \\ &\iff x \in (\overline{A} \cup C) \cap (\overline{C} \cup A) \end{aligned}$$

En particulier, $x \in \overline{A} \cup C$, donc $x \in \overline{A}$ ou $x \in C$. Or, on sait que $x \in A$, donc $x \notin \overline{A}$. Il s'en suit que $x \in C$.

En définitive, $B \subset C$.

• B et C jouant des rôles symétriques, on montrerait de la même manière que $C \subset B$.

Subséquentement, $B = C$.

6) L'ensemble A étant fixé, déterminer un ensemble B_0 tel que $A\Delta B_0 = \emptyset$. En déduire tous les sous-ensembles X de E qui vérifient $A\Delta X = \emptyset$.

/5

(2 points pour avoir trouvé B_0 et l'avoir justifié, 3 points pour avoir justifié que $X = B_0$ est la seule solution).

On remarque que $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = \emptyset$. Donc $B_0 = \boxed{A}$ convient.

Cherchons tous les $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A\Delta X = \emptyset$. On raisonne par analyse-synthèse.

• Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ qui vérifie $A\Delta X = \emptyset$. On a en particulier

$$A\Delta X = A\Delta B_0$$

donc par la question 5), on en déduit que $X = B_0$.

• Par ailleurs, B_0 est bien solution par ce qui précède.

Finalement, la seule solution de $A\Delta X = \emptyset$ est $B_0 : \boxed{\mathcal{S} = \{A\}}$.

- 7) L'ensemble A étant fixé, déterminer un ensemble B_1 tel que $A\Delta B_1 = E$. En déduire tous les sous-ensembles X de E qui vérifient $A\Delta X = E$.

(Idem que ci-dessus).

On remarque que $A\Delta\bar{A} = (A \cup \bar{A}) \setminus (A \cap \bar{A}) = E \setminus \emptyset = E$. Donc $B_1 = \bar{A}$ convient.

En faisant le même raisonnement qu'à la question précédente, on en déduit que $\bar{A}$ est l'unique solution de $A\Delta X = E$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{\bar{A}\}}$.

- 8) Montrer que : $\forall A, C \in \mathcal{P}(E) \quad \exists! B \in \mathcal{P}(E) \quad A\Delta B = C$.

Soit $A, C \in \mathcal{P}(E)$. On pose $B = A\Delta C = (C \setminus A) \cup (A \setminus C)$, ou encore, ce qui revient au même : $B = (C \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{C})$. Calculons

$$A\Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

Dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \bar{A} \cap B &= \bar{A} \cap ((C \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{C})) \\ &= [\bar{A} \cap (C \cap \bar{A})] \cup [\bar{A} \cap (A \cap \bar{C})] \\ &= (\bar{A} \cap \bar{A} \cap C) \cup (\bar{A} \cap A \cap \bar{C}) \\ &= (\bar{A} \cap C) \cup \emptyset \\ &= \bar{A} \cap C \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A \cap \bar{B} &= A \cap \overline{(C \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{C})} \\ &= A \cap \overline{(C \cap \bar{A})} \cap \overline{(A \cap \bar{C})} \\ &= A \cap (\bar{C} \cup A) \cap (\bar{A} \cup C) \\ &= [A \cap (\bar{A} \cup C)] \cap (\bar{C} \cup A) \end{aligned}$$

(par commutativité et associativité de l'intersection). Ainsi :

$$\begin{aligned} A \cap \bar{B} &= [(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap C)] \cap (\bar{C} \cup A) \\ &= [\emptyset \cup (A \cap C)] \cap (\bar{C} \cup A) \\ &= (A \cap C) \cap (\bar{C} \cup A) \\ &= A \cap [C \cap (\bar{C} \cup A)] \\ &= A \cap [(C \cap \bar{C}) \cup (C \cap A)] \\ &= A \cap [\emptyset \cup (C \cap A)] \\ &= A \cap (C \cap A) \\ &= A \cap A \cap C \\ &= A \cap C \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= (A \cap C) \cup (\bar{A} \cap C) \\ &= (A \cup \bar{A}) \cap C \\ &= E \cap C = \boxed{C} \end{aligned}$$

Montrons enfin qu'un tel ensemble B est unique. En effet, si $B' \in \mathcal{P}(E)$ est un ensemble qui vérifie $A\Delta B' = C$, alors en particulier $A\Delta B = A\Delta B'$, donc $B = B'$ par la question 5).

- 9) Avec $E = \mathbb{N}$, montrer que : $\exists A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad A \cup (B\Delta C) \neq (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

On pose $A = \{0\}$ et $B = C = \emptyset$. Puisque

$$\emptyset \Delta \emptyset = (\emptyset \cup \emptyset) \setminus (\emptyset \cap \emptyset) = \emptyset$$

On en déduit :

$$A \cup (B\Delta C) = A \cup \emptyset = A$$

Cependant,

$$\begin{aligned} (A \cup B) \Delta (A \cup C) &= A \Delta A \\ &= (A \cup A) \setminus (A \cap A) \\ &= A \setminus A = \emptyset \end{aligned}$$

On a donc bien $A \cup (B\Delta C) \neq (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.